Corso di Strategie d'Impresa

* * * *

Settima Unità Didattica
Le strategie dinamiche

La teoria dei giochi

La teoria dei giochi studia le interazioni strategiche tra agenti razionali, in cui il risultato per ciascun partecipante dipende non solo dalle proprie scelte, ma anche da quelle degli altri. Essa fornisce modelli e strumenti per analizzare situazioni di conflitto e cooperazione, aiutando a prevedere le decisioni in contesti competitivi e collaborativi.

La teoria dei giochi concerne l’analisi delle decisioni che coinvolgono più individui

La decisione assunta da ogni singolo agente dipende dalle decisioni di tutti gli altri, si dice quindi che il gioco è interattivo

Ogni agente cerca di definire le probabili mosse degli altri agenti in modo da elaborare la migliore risposta o contromossa possibile

Obiettivo della teoria dei giochi è offrire strumenti concettuali e matematici per la corretta definizione di tale risposta

Classificazione dei giochi

Giochi statici: mosse simultanee
- Con informazione completa
- Con informazione incompleta

Giochi dinamici: mosse in successione
- Con informazioni completa
- Con informazione incompleta

Ipotesi sul comportamento dei giocatori

1) Razionalità illimitata ossia che tutti utilizzino le informazioni nel migliore dei modi

- Sono interessati a massimizzare il payoff individuale
- Sono "calcolatori" perfetti
- Tutti conoscono la razionalità degli altri e si aspettano che gli altri si comportino in modo razionale

2) Informazione Completa, ossia la funzione dei payoff di ogni giocatore è nota a tutti:

- tutti i giocatori conoscono perfettamente la struttura del gioco
- tutti i giocatori sanno che gli altri la conoscano
- e che sanno che loro sanno ecc…

I giochi statici con informazione completa

Il gioco in forma statica con informazione completa specifica:

- I giocatori che partecipano al gioco
- Le strategie a disposizione di ogni giocatore definite come il *programma completo di mosse da utilizzare durante lo svolgimento del gioco*

$$S_1, ..S_i, \dots S_n$$

- I payoff ricevuto da ogni giocatore per ogni possibile combinazione di strategie scelte dai giocatori *i*

$$u_1 .. u_i .. u_n$$

- Il payoff del giocatore *i*, se i giocatori scelgono le strategie ($S_1, ..S_i, \dots S_n$), è dato dalla seguente funzione

$$u_i(S_1, ..S_i, \dots S_n)$$

DEF: La rappresentazione in forma normale o strategica di un gioco con n giocatori specifica lo spazio delle strategie dei giocatori $S_1, ..S_i, \dots S_n$ e le loro funzioni dei payoff $u_1 .. u_i .. u_n$. Questo gioco è indicato con:

$$G\ \{S_1, ..S_i, \dots S_n\ ; u_1 .. u_i .. u_n\}$$

I giochi statici con informazione completa: soluzione

I giochi in forma normale o strategica si possono risolvere utilizzando i seguenti approcci:

1. Strategia dominante
2. Strategia dominante e best reply
3. Eliminazione iterata di strategie strettamente dominate
4. Equilibrio di Nash
5. Strategie miste

Strategia dominante :
Il dilemma del prigioniero

Due persone vengono accusate di aver commesso un delitto. La polizia li ferma. Il giudice è certo della loro colpevolezza ma non ha prove.

Decide allora di incontrarli separatamente e propone a ciascuno il seguente accordo:

'…*Io so che tu sei colpevole. Se tu confessi e il tuo compare non confessa, a lui diamo 20 anni di prigione e tu esci stasera. Se tutti e due confessate, vi premiamo per la collaborazione e vi diamo 8 anni a testa. Se nessuno dei due confessa, con le prove che ho vi diamo 2 anni a testa per associazione a delinquere….'*

I Giochi in forma strategica

il dilemma del prigioniero

		Prigioniero 2	
		confessa	non confessa
Prigioniero 1	confessa	-8, -8	0, -20
	non confessa	-20, 0	-2, -2

strategia dominante

		P 2 C	P 2 NC
P 1	C	-8 , -8	0 , -20
P 1	NC	-20 , 0	-2 , -2

- Prigioniero 1: osserviamo che i payoff della prima riga sono sempre migliori dei payoff della seconda riga
- Prigioniero2: i payoff della prima colonna sono sempre migliori dei payoff della seconda colonna

La strategia dominante

Equilibrio del gioco sarà dunque la coppia strategica (confessare, confessare) poiché entrambi i giocatori possiedono una strategia dominante

Il risultato di equilibrio non è l’ottimo del gioco poiché outcome (-2, -2) è il risultato collettivamente migliore

È tuttavia un equilibrio instabile poiché entrambi i giocatori hanno interesse a spostarsi da esso

Il dilemma del prigioniero

Dal momento che i giocatori non possono comunicare tra loro
Ci troviamo difronte al seguente paradosso:

Confessare è la scelta ottimale per gli individui in quanto singoli (8 anni se confessa anche l'altro, 0 se l'altro non confessa) mentre non confessare è la scelta ottimale in quanto gruppo (2 anni per entrambi)

la strategia migliore per entrambi gli individui è confessare

=>

ciò che è meglio per l'individuo non è necessariamente meglio per tutti gli individui come entità collettiva

Un solo giocatore con strategia dominante: la best reply

- giocatore2:

i payoff della prima colonna sono sempre migliori dei payoff della seconda: strategia dominante

- Giocatore 1 :

Non ha una strategia dominante:

BEST REPLY

		G 2	
		A	B
G1	A	30 50	70 45
	B	42 30	18 12

Un solo giocatore con strategia dominante

Il giocatore 2 ha una strategia strettamente dominante poiché avrà sempre convenienza a giocare A indipendentemente dalle scelte del giocatore 1

Il giocatore 1 non ha nessuna strategia che domina l'altra ma, dal momento che sa che il giocatore 2 si comporterà in modo razionale il giocatore 1 può adottare la *best reply* ossia B.

La soluzione di equilibrio è A per il giocatore 2 e B per il giocatore 1 con *outcome* (42,30)

Eliminazione iterata di strategie strettamente dominate

Nel gioco in forma normale

$G=\{S_1,..S_n ; U_1..U_n\}$

Siano S'_i, S''_i elementi di S_i

due strategie ammissibili per il giocatore i,

la strategia S'_i è *strettamente dominata* da S''_i *se per ogni combinazione ammissibile di strategie degli altri giocatori, il payoff che i riceve giocando S'i è strettamente inferiore a quello che riceve giocando S''*

$$U_i(S_1,.., \underline{S'_i}, ..S_n) < U_i(S_1,.., \underline{S''_i}, ..S_n)$$

I giocatori razionali non giocano strategie strettamente dominate

Eliminazione iterata di strategie strettamente dominate

G1 \ G2	A	B	C
A	1 0	1 2	0 1
B	0 3	0 1	2 0

Come si risolve il gioco?

G1 ha una strategia dominante A

G2 ha una Best Replay B

Equilibrio di Nash

Nel gioco in forma normale con n giocatori, $G=\{S_1,..S_n;\ U_1..U_n\}$, le strategie *($S_1$*,.. S_n*) sono un equilibrio di Nash se, per ogni giocatore i, S_i* è la migliore risposta del giocatore i alle strategie specificate per gli altri n-1 giocatori,*

Una coppia di strategie forma un equilibrio di Nash se esse sono reciprocamente best replies

Equilibrio di Nash: le caratteristiche

1. **Stabile:** nessun giocatore ha interesse a deviare ***unilateralmente*** dal cammino suggerito dalla strategia di equilibrio. Se così facesse l'unico risultato consisterebbe in una riduzione del suo payoff.

Anche in presenza di un equilibrio di Nash i giocatori possono sempre migliorare la loro situazione se cambiano ***congiuntamente*** le loro strategie

Equilibrio di Nash : le caratteristiche

2. **Condizione minima per la soluzione del gioco**: offre ai giocatori la possibilità di prevedere le strategie altrui
3. **Semplice identificazione**

Sono anticipazioni ***stabili e comuni*** di equilibri

Se tali anticipazioni si verificano nessun giocatore ha incentivo a modificare la propria strategia

G1 \ G2	L	C	R
T	0 4	4 0	5 3
M	4 0	0 4	5 3
B	3 5	3 5	6 6

Domina in senso Paretiano

Speculatore 2

speculatore 1	vende	Acquista
Vende	0 0	2 2
Acquista	1 1	0 0

Alessandro

Sara	Cinema	calcio
Cinema	$\underline{2}$ $\underline{1}$	0 0
calcio	0 0	$\underline{1}$ $\underline{2}$

+ equilibri di Nash senza soluzione obbligata

Eliminazione iterata di strategie strettamente dominate

		Newsweek	
		Politica	Guerra
Times	Politica	38, 32	60, 40
	Guerra	40, 60	20, 10

- Nessuno dei due giornali ha una strategia dominante

la best reply di un giocatore dipende dalle mosse dell'altro

Equilibrio di Nash

Equilibrio di Nash

Un equilibrio di Nash è stabile perché nessun giocatore ha interesse a deviare unilateralmente dal cammino suggerito dalla strategia di equilibrio. Se così facesse, l'unico risultato sarebbe una riduzione del suo payoff

		G 2: A		G 2: B	
G1	A	38	32	60	40
	B	40	60	20	10

AB(60,40) BA(40,60)

Strategie Miste

Non riusciamo a trovare due strategie che siano una la scelta ottimale rispetto all’altra e viceversa…

Non c’è equilibrio…

		G 2	
		Testa	Croce
G1	Testa	$\underline{1}$ 0	0 $\underline{1}$
	Croce	0 $\underline{1}$	$\underline{1}$ 0

Equilibri di Nash in strategie miste

Equilibri in strategie miste

È possibile ancora trovare una soluzione razionale?

- Per poterla trovare dobbiamo ampliare lo spazio delle strategie dei giocatori introducendo una distribuzione di probabilità sulle possibili scelte => STRATEGIE MISTE
- A ogni strategia pura (= strategia di partenza) viene associato un valore che rappresenta la probabilità con cui viene giocata quella strategia.
- A questo punto le strategie dei giocatori consistono nello stabilire la probabilità con cui scegliere le strategie del gioco iniziale

Strategie miste

***Strategia pura**: un giocatore sceglie con certezza una determinata azione*

***Strategia mista**: un giocatore sceglie casualmente fra più azioni, ossia sceglie di giocare S1 con probabilità p e S2 con probabilità (1-p)*

se non esiste un equilibrio di Nash a strategie pura possiamo cercare un equilibrio di Nash a strategia mista

Teorema di Nash: ogni gioco a somma non-nulla possiede sempre un equilibrio di Nash in strategie miste

Si definisce "a somma zero o nulla", un gioco nel quale ciò che un partecipante vince viene perso dall'altro

Le strategie miste

- La strategia mista per il giocatore i è una distribuzione di probabilità sulle strategie contenute in Si.
- Le strategie pure sono le scelte del giocatore: Testa o Croce
- Una strategia mista per il giocatore i è la distribuzione di probabilità (p,1-p) dove p è la probabilità per il G1 di giocare testa e 1-p di giocare croce e (q, 1-q) dove q è la probabilità per G2 di giocare Testa e 1-q è la probabilità di giocare Croce.

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		Testa	**Croce**
p	**Testa**	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	**Croce**	(0, 1)	(1, 0)

- Visto che ciascun giocatore ha solo due strategie a disposizione, giocherà la prima con una certa probabilità p e la seconda con probabilità $1 - p$
- Indicheremo le strategie disposizione del primo giocatore con $(p, 1 - p)$
- Il primo giocatore deciderà di mostrare Testa con probabilità p e di mostrare Croce con probabilità $1 - p$
- Allo stesso modo indicheremo le strategie del secondo giocatore con $(q, 1 - q)$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q TESTA	$1-q$ CROCE
p	TESTA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	CROCE	(0, 1)	(1, 0)

TT: pq	TC: $p(1-q)$
CT: $(1-p)q$	CC: $(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

- Dobbiamo ora calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, come valori attesi
- Dobbiamo verificare quale sia la probabilità di ritrovarsi in ciascuno degli esiti possibili
- Per esempio, la probabilità che entrambi giochino la TESTA (TT) è uguale al prodotto tra la probabilità che il primo giocatore mostri Testa e la probabilità che anche il secondo faccia questa scelta, quindi pq

Come si trovano gli equilibri in miste?

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

		q	$1-q$
		TESTA	CROCE
p	TESTA	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	CROCE	(0, 1)	(1, 0)

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = pq * 1 + p(1-q) * 0 + (1-p)q * 0 + (1-p)(1-q) * 1$$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Come si trovano gli equilibri in miste?

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato.

		q	$1-q$
		TESTA	**CROCE**
p	**TESTA**	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	**CROCE**	(0, 1)	(1, 0)

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

pq	$p(1-q)$
$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

Per il secondo giocatore:

$$g(p,q) = pq * 0 + p(1-q) * 1 + (1-p)q * 1 + (1-p)(1-q) * 0$$

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		TESTA	**CROCE**
p	**TESTA**	(1, 0)	(0, 1)
$1-p$	**CROCE**	(0, 1)	(1, 0)

TT: pq | TC: $p(1-q)$

CT: $(1-p)q$ | CC: $(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

Per calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, moltiplichiamo quanto otterrebbero in un determinato esito del gioco per la probabilità che quello stesso esito venga giocato

Per il primo giocatore:

$$f(p,q) = 2pq + 1 - p - q$$

Per il secondo:

$$g(p,q) = p + q - 2pq$$

Come si trovano gli equilibri

Per il giocatore 1 ho una funzione di p, di cui voglio trovare il massimo.

F(p,q)=2pq+1-p-q => p(2q-1)+1-q;

poiché la funzione di utilità del primo giocatore è crescente in p tutto dipende dal coefficiente angolare 2q-1

Quindi:

2q-1>0=>2q>1=>q>1/2

Soluzione: quando q>1/2 il giocatore 1 giocherà testa.

Come si trovano gli equilibri

Per il giocatore 2 ho una funzione di q, di cui voglio trovare il massimo.

$g(p,q)=p+q-2pq \Rightarrow q(1-2p)+p$

poiché la funzione di utilità del secondo giocatore è crescente in q tutto dipende dal coefficiente angolare 1-2p

Quindi:

$1-2p>0 \Rightarrow -2p>-1 \Rightarrow 2p<1 \Rightarrow p<1/2$

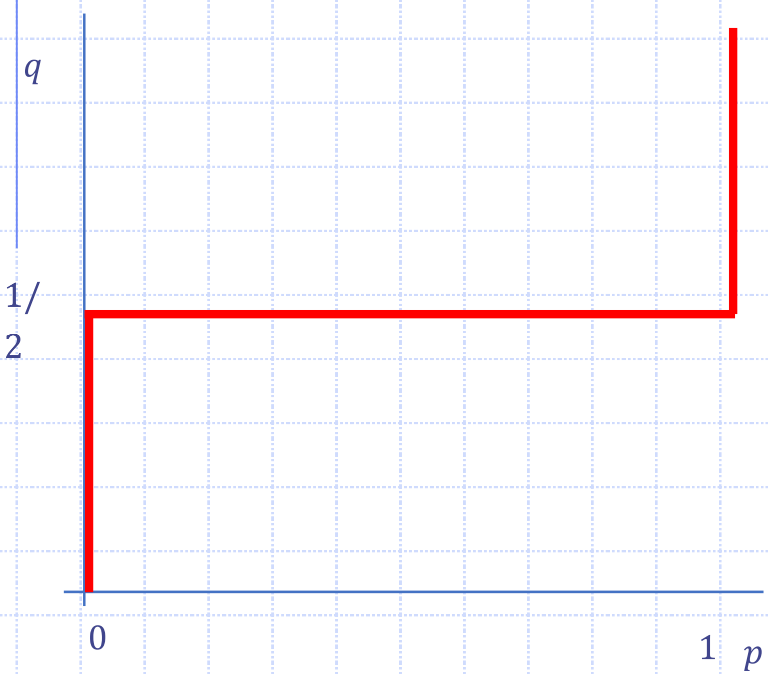
Soluzione: quando p<1/2 il giocatore 2 giocherà testa.

Ricorda che..

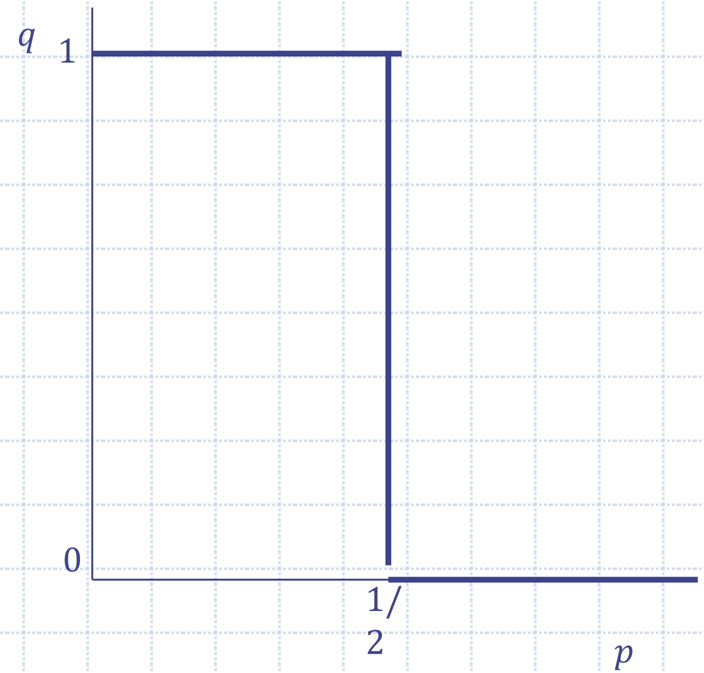
- $p=1 \Rightarrow$ giocatore 1 ha una strategia pura in T
- $p=0 \Rightarrow$ giocatore 1 ha una strategia pura in C
- $q=1 \Rightarrow$ giocatore 2 ha una strategia pura in T
- $q=0 \Rightarrow$ giocatore 2 ha una strategia pura in C

Come si trovano gli equilibri in miste?

Giocatore 1 :



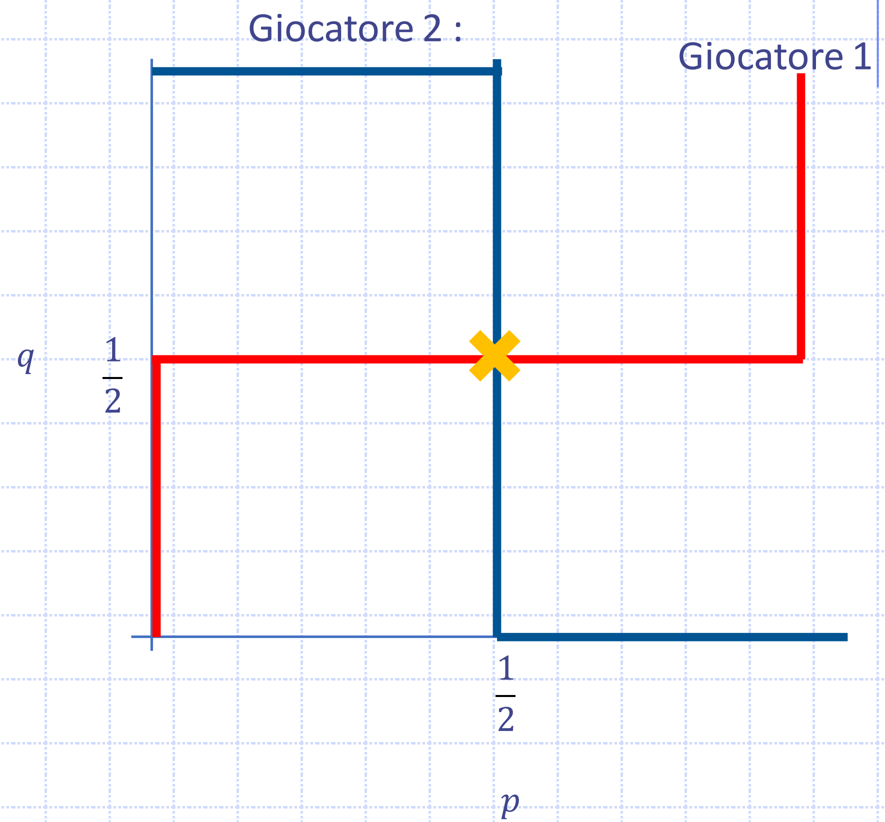
Giocatore 2:



Come si trovano gli equilibri in miste?

In sintesi:

- **Quando q>1/2 per il giocatore 1 Testa è la migliore di tutte le strategie (sia pure che miste)**
- **Quando p<1/2 per il giocatore 2 Testa è la migliore di tutte le strategie (sia pure che miste)**



Se q=1/2?
Nelle strategie pure il giocatore 1 è indifferente, ma lo è anche nelle strategie miste perché p non dipende da q.

Come si trovano gli equilibri in miste?

		q	$1-q$
		TESTA	**CROCE**
p	**TESTA**	(0, 1)	(3, 0)
$1-p$	**CROCE**	(4, 0)	(0, 2)

TT: pq	TC: $p(1-q)$
CT: $(1-p)q$	CC: $(1-p)(1-q)$

Probabilità che si verifichi ciascun esito del gioco

- Dobbiamo ora calcolare le funzioni di utilità dei giocatori, come valori attesi
- Dobbiamo verificare quale sia la probabilità di ritrovarsi in ciascuno degli esiti possibili
- Per esempio, la probabilità che entrambi giochino la TESTA (TT) è uguale al prodotto tra la probabilità che il primo giocatore mostri Testa e la probabilità che anche il secondo faccia questa scelta, quindi pq

Risolviamo per il giocatore 1

$Max(p)= pq(0)+(1-p)q(4)+(3)p(1-q)+(0)(1-p)(1-q)$

$Max(p)=(1-p)q(4)+p(1-q)(3)$

$Max(p)=4q-4pq+3p-3pq$

$Max(p)=4q+3p-7pq$

$p(3-7q)+4q$ (equivale a fare la derivata per p)

$3-7q>0 \Rightarrow -7q>-3 \Rightarrow 7q<3 \Rightarrow q<3/7$

Se il giocatore 2 gioca con probabilità q minore di 3/7=> il giocatore 1 avrà convenienza a giocare R

Risolviamo per il giocatore 2

- Max(q)= (1)pq+(0)(1-p)q+(0)p(1-q)+(2)(1-p)(1-q)
- Max(p)=pq+2(1-p)(1-q)
- Max(p)=3pq-2q-2p+2
- q(3p-2)-2p+2 (equivale a fare la derivata per q)
- 3p-2>0=>p>2/3
- Se il giocatore 1 gioca con probabilità maggiore p di 2/3 il giocatore 2 avrà convenienza a giocare R

- Se $p<2/3$ => **Giocatore 2 sceglie L (puro)**
- Se $p>2/3$ => **Giocatore 2 sceglie R (puro)**
- Se $p=2/3$ = **Giocatore 2 è indifferente**

Se il giocatore 1 non vuole dare un vantaggio al giocatore 2
Dovrà giocare con $p= 2/3$

- Se $q<3/7$ => **Giocatore 1 sceglie R (puro)**
- Se $q>3/7$ => **Giocatore 1 sceglie L (puro)**
- Se $q=3/7$ = **Giocatore 1 è indifferente**

Se il giocatore 2 non vuole dare un vantaggio al giocatore 1
Dovrà giocare con $Q= 3/7$

I giochi dinamici con informazione completa

1. Giochi dinamici con informazione completa e perfetta : in corrispondenza di ogni mossa il giocatore a cui tocca muovere è a conoscenza dell'intera storia del gioco fino a quel punto
2. Giochi dinamici con informazione completa ma imperfetta: in corrispondenza di qualche mossa il giocatore non è a conoscenza dell'intera storia del gioco

Backwards induction

Le caratteristiche

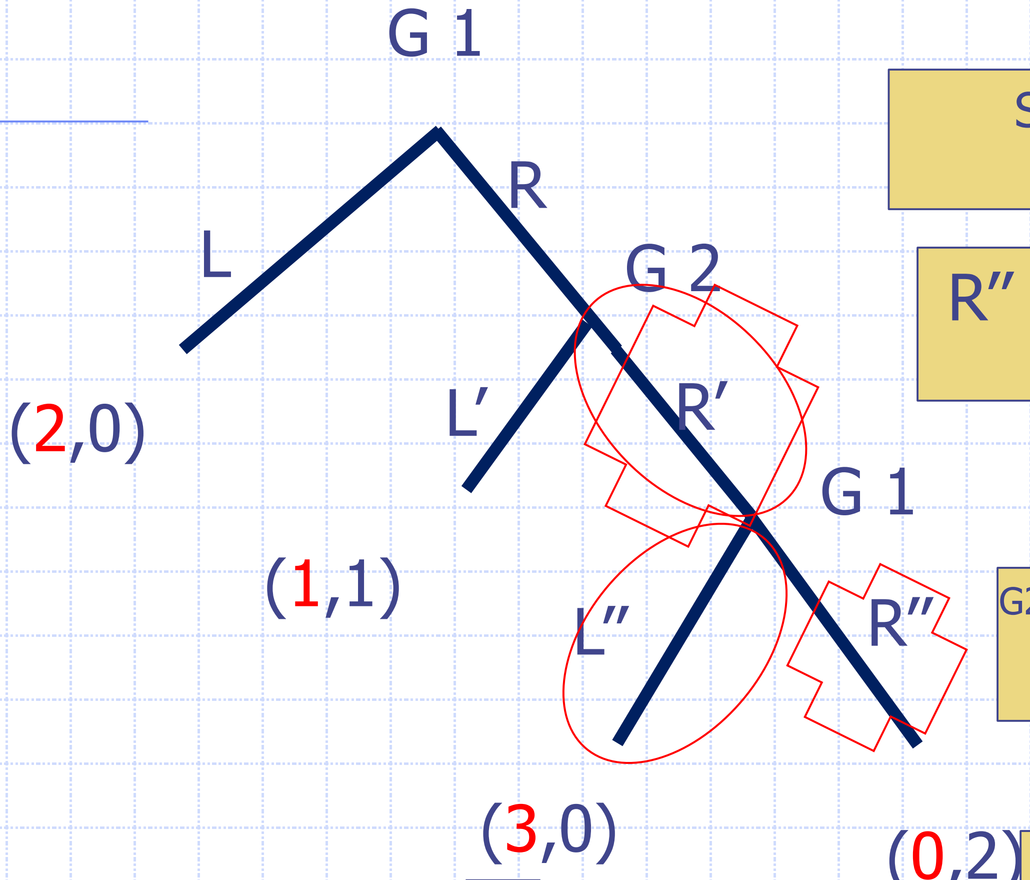
a) le mosse si verificano in successione
b) Tutte le mosse precedenti sono osservate prima che venga scelta mossa successiva
c) I payoff dei giocatori in corrispondenza di ogni combinazione ammissibile di mosse sono conoscenza comune

La soluzione si ottiene applicando la backwords induction (induzione a ritroso)

Backwards induction

Si consideri il seguente gioco in tre mosse in cui il giocatore 1 muove due volte:

1. Il giocatore 1 sceglie L o R; L termina il gioco con payoff (2,0)
2. Il giocatore 2 osserva la mossa del giocatore 1 e può scegliere L′ o R′ se il giocatore 1 ha scelto R; L′ termina il gioco (1,1)
3. Il giocatore 1 osserva la scelta del giocatore 2, può scegliere L″ o R″ (se la precedente mossa è stata R′): L″(3,0), R″(0,2)



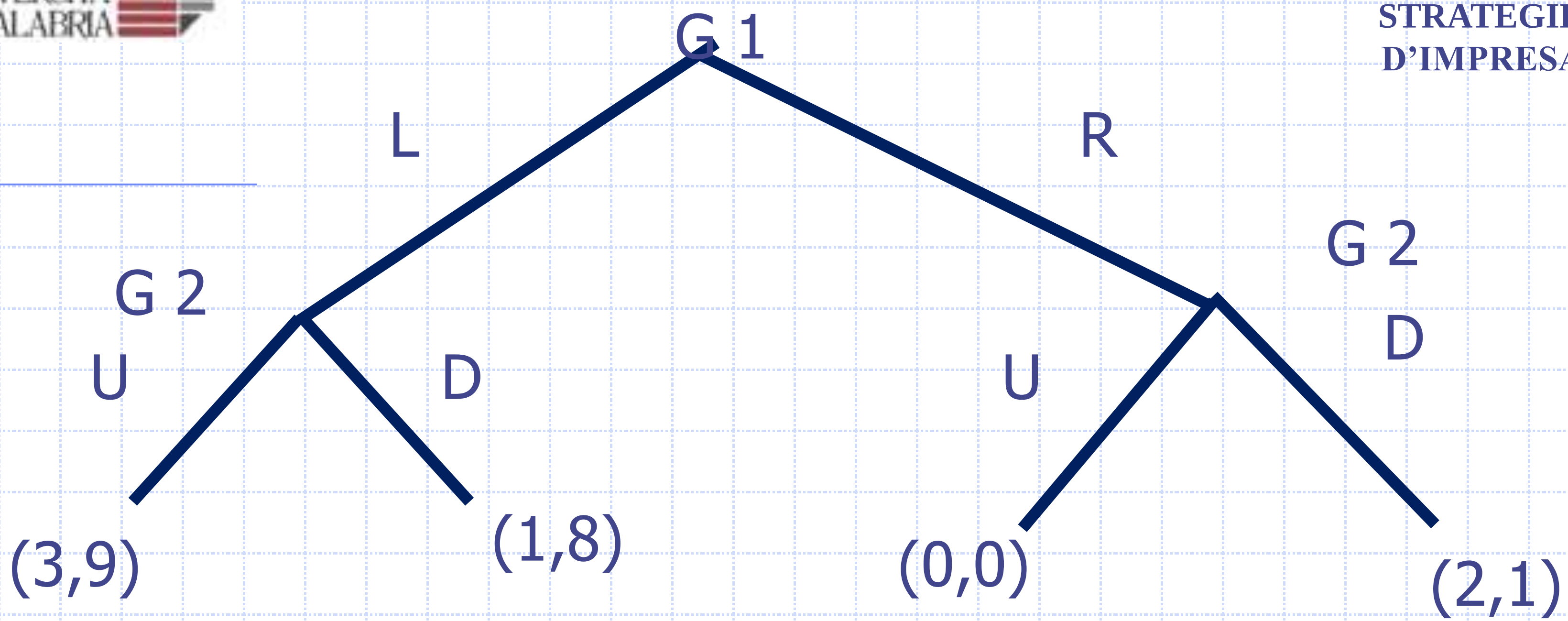
Se G2 ha giocato R'
=>G1 giocherà L''

R'' non verrà giocata

G2 non giocherà R' perché gli porta un payoff di zero

Come si risolve il gioco?

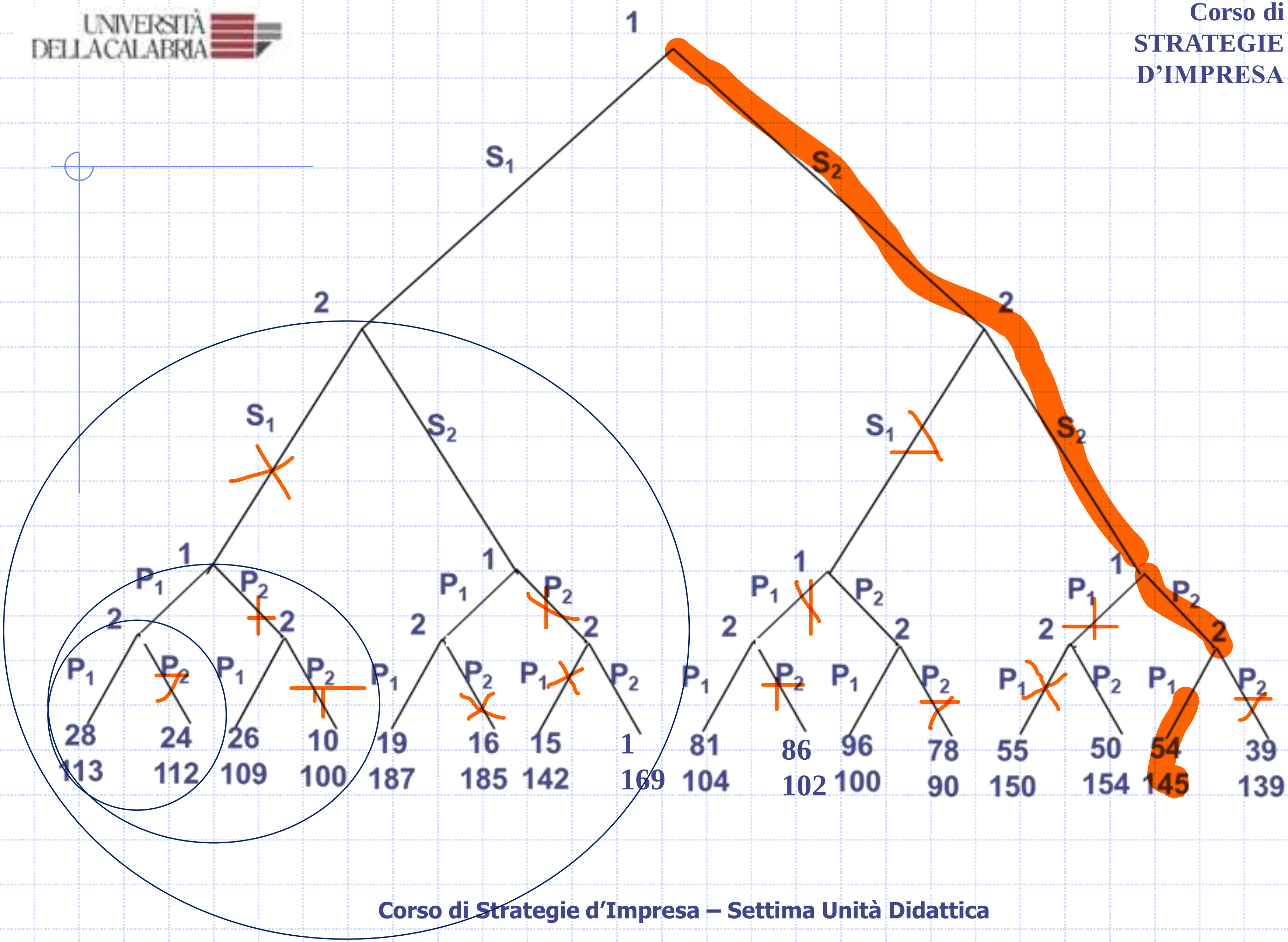
Se G1 gioca L ottiene 2
Se gioca R ottiene 1



Se G1 gioca L ⇨ G2 gioca U: payoff (3,9)

Se G1 gioca R ⇨ G2 gioca D: payoff (2,1)

⇨ (L,U) è la soluzione del gioco


1
S1
S2
2
2
S1
S2
S1
S2
1
1
1
1
P1
P2
2
2
P1
P2
P1
P2
28 113
24 112
26 109
10 100
19 187
16 185
15 142
1 169
81 104
86 102
96 100
78 90
55 150
50 154
54 145
39 139